

Forum

April 24, 2019

1 Goldbachsche Vermutung

Aufgabe: Wir wollen überprüfen ob die Goldbachsche Vermutung, dass sich jede gerade natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 2$ als Summe von zwei Primzahlen schreiben lässt, für alle geraden Zahlen bis 20.000 gilt.

1.1 Importe

Wir importieren `imap()` weil *SageMath* noch auf Python 2.7 setzt.

```
In [1]: from itertools import imap
```

1.2 Konstanten

Die untere und obere Grenze des zu untersuchenden Intervalls und alle Primzahlen bis zur oberen Grenze als Konstanten.

```
In [2]: LOWER_LIMIT = 4  #: First even number >2
        UPPER_LIMIT = 20000
        PRIMES = prime_range(UPPER_LIMIT + 1)
```

1.3 Testfunktion

Eine Funktion zum Testen, ob eine gegebene Zahl als Summe von zwei Primzahlen ausgedrückt werden kann.

Die Funktion ist nur für Zahlen im Wertebereich von der vorher festgelegten Unter- und Obergrenze, jeweils inklusive, definiert.

Es werden der Reihe nach für alle Primzahlen bis zur definierten Obergrenze zwei Tests durchgeführt:

1. Ob die aktuelle Primzahl grösser oder gleich der zu prüfenden Zahl ist. Falls ja kann die Schleife beendet werden, und die Zahl ist nicht als Summe von zwei verschiedenen Primzahlen darstellbar. Falls sie es wäre, hätte in einem vorhergehenden Schleifendurchlauf nämlich die nächste Prüfung ge-griffen und die Funktion bereits beendet.
2. Ob die Differenz der zu prüfenden Zahl und der aktuellen Primzahl ebenfalls prim ist. Falls ja ergeben die Differenz und die aktuelle Primzahl zusammen die zu prüfende Zahl und beide sind prim – also ist die zu prüfende Zahl als Summe von zwei Primzahlen darstellbar und die Funktion kann beendet werden.

Am Ende der Funktion wird False zurückgegeben weil die gesuchte Bedingung für keine der in Frage kommenden Primzahlen in der Schleife zutraf.

```
In [3]: def is_sum_of_two_primes(number):
        if not LOWER_LIMIT <= number <= UPPER_LIMIT:
            raise ValueError(
                ``number` out of range {}..{}'`.format(LOWER_LIMIT, UPPER_LIMIT)
            )

        for prime in PRIMES:
            if prime >= number:
                break
            if (number - prime).is_prime():
                return True

        return False
```

1.4 Ergebnis

Nun können wir prüfen ob die Bedingung für alle geraden Zahlen innerhalb des zu untersuchenden Intervalls gilt.

```
In [4]: all(imap(is_sum_of_two_primes, range(LOWER_LIMIT, UPPER_LIMIT + 1, 2)))
```

```
Out[4]: True
```